Probabilidades y Estadística (M)

Clase 09/06/2016. Esperanza condicional

Teorema 1. *Sea (X,Y) un vector aleatorio con X absolutamente continua e Y discreta. Entonces, valen las siguientes afirmaciones:*

(i) Para cada $y \in R_Y$ se tiene $p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} p_{Y|X=x}(y) f_X(x)dx$.

(ii) Para cada $y \in R_Y$ la densidad condicional de X bajo $\mathbb{P}(\cdot|Y=y)$ viene dada por

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{Y|X=x}(y) f_X(x)}{\int_{\mathbb{R}} p_{Y|X=t}(y) f_X(t)dt}$$

Teorema 2. *Sea (X,Y) un vector aleatorio con X absolutamente continua e Y discreta. Entonces, valen las siguientes afirmaciones:*

(i) $f_X(x) = \sum_{y \in R_Y} f_{X|Y=y}(x) p_Y(y)$

(ii) Para $y \in R_Y$ se tiene

$$p_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{f_{X|Y=y}(x)p_Y(y)}{\sum_{z \in R_Y} f_{X|Y=z}(x)p_Y(z)} & \textit{si } \sum_{z \in R_Y} f_{X|Y=z}(x)p_Y(z) > 0 \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

1. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$ y $X|Y \sim Be(Y/2)$.
   (a) Probar que X es una variable discreta y hallar su funcin de probabilidad puntual.
   (b) Para cada $y \in \mathbb{R}$ y $x \in R_X$ calcular $\mathbb{P}(Y \leq y | X = x)$.
2. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ y $X|Y \sim \mathcal{P}(Y)$. Probar que $Y|X \sim \Gamma(\alpha + X, \lambda + 1)$.
3. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \sim Be(1/3)$ y $X|Y \sim \mathcal{U}_{[1-Y, 2+Y]}$.
   (a) Hallar F_X.
   (b) Para $y \in \{0,1\}$ calcular $p_{Y|X=x}(y)$.